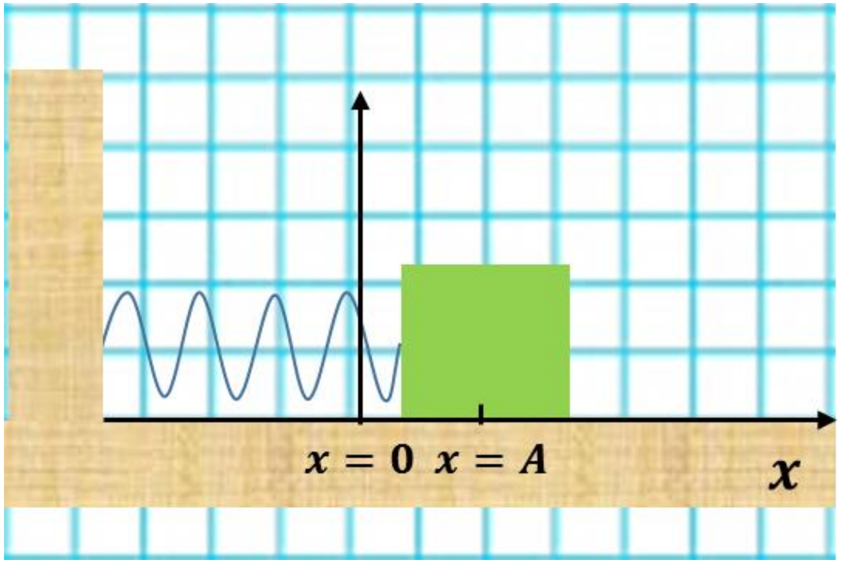
RUCH DRGAJĄCY

Ruch okresowy = periodyczny – ruch powtarzający się w regularnych odstępach czasu, przemieszczenie cząstki w takim ruchu można wyrazić za pomocą funkcji sinus lub cosinus (funkcje harmoniczne)

Siła harmoniczna = sprężystości – siła działająca na ciało proporcjonalna do przesunięcia tego ciała i odwrotnie do niego skierowana

$$F = -k \cdot x$$

gdzie:
x – wychylenie ciała z położenia równowagi,
k – stała sprężystości



Drgania swobodne – siła sprężystości jest równa sile wypadkowej działającej na ciało, masa zamocowana do sprężyny może poruszać się bez tarcia

OSCYLATOR HARMONICZNY PROSTY

Z II zasady dynamiki Newtona:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

Dla drgań swobodnych:

$$F = -k \cdot x$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + k \cdot x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

Równanie oscylatora harmonicznego prostego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + {\omega_0}^2 \cdot x = 0$$

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego prostego:

$$x(t) = A \cdot cos(\omega_0 t + \varphi)$$

gdzie:

$x -$ wychylenie ciała z położenia równowagi w chwili t [m],

$A -$ amplituda drgań, czyli wychylenie maksymalne [m],

$\omega_0 -$ częstość drgań, pulsacja,

$(\omega_0 t + \varphi)$ $-$ faza drgań,

$\varphi -$ faza początkowa

Zależność prędkości od czasu:

$$V(t) = x'(t) = -A \cdot sin(\omega_0 t + \varphi) \cdot \omega_0$$

$$V(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot sin(\omega_0 t + \varphi)$$

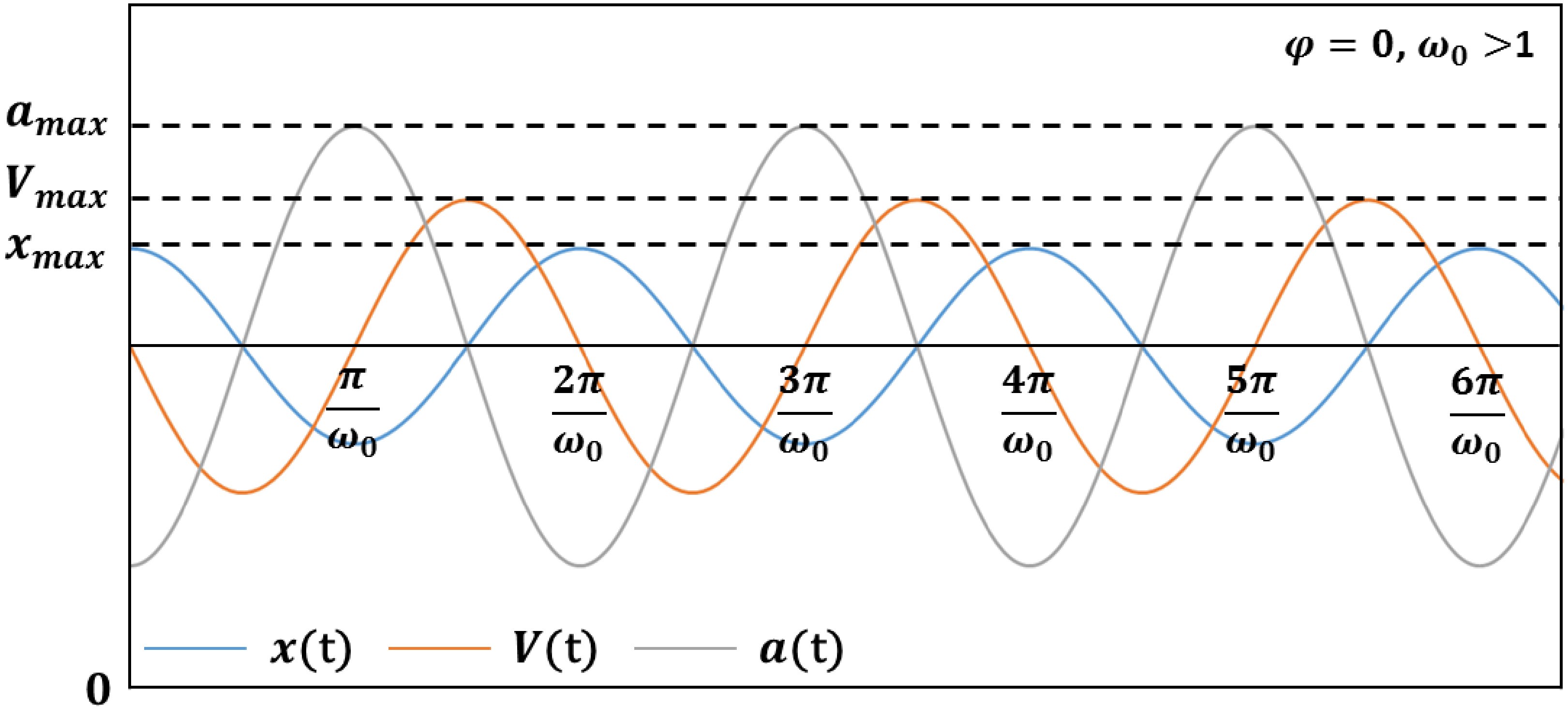
Zależność przyspieszenia od czasu:

$$a(t) = V'(t) = -A \cdot {\omega_0}^2 cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$x_{max} = A$$

$$V_{max} = A\omega_0$$

$$a_{max} = A{\omega_0}^2$$



$\varphi = 0,\ \omega_0 > 1$
a_{max}
V_{max}
x_{max}
0
$\frac{\pi}{\omega_0}$
$\frac{2\pi}{\omega_0}$
$\frac{3\pi}{\omega_0}$
$\frac{4\pi}{\omega_0}$
$\frac{5\pi}{\omega_0}$
$\frac{6\pi}{\omega_0}$
$x(\mathrm{t})$
$V(\mathrm{t})$
$a(\mathrm{t})$

Okres drgań – czas jednego pełnego drgania w ruchu drgającym, czyli czas pomiędzy wystąpieniami tej samej fazy drgań

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Jednostką okresu drgań jest $[s]$.

Częstotliwość drgań – liczba drgań występujących w jednostce czasu

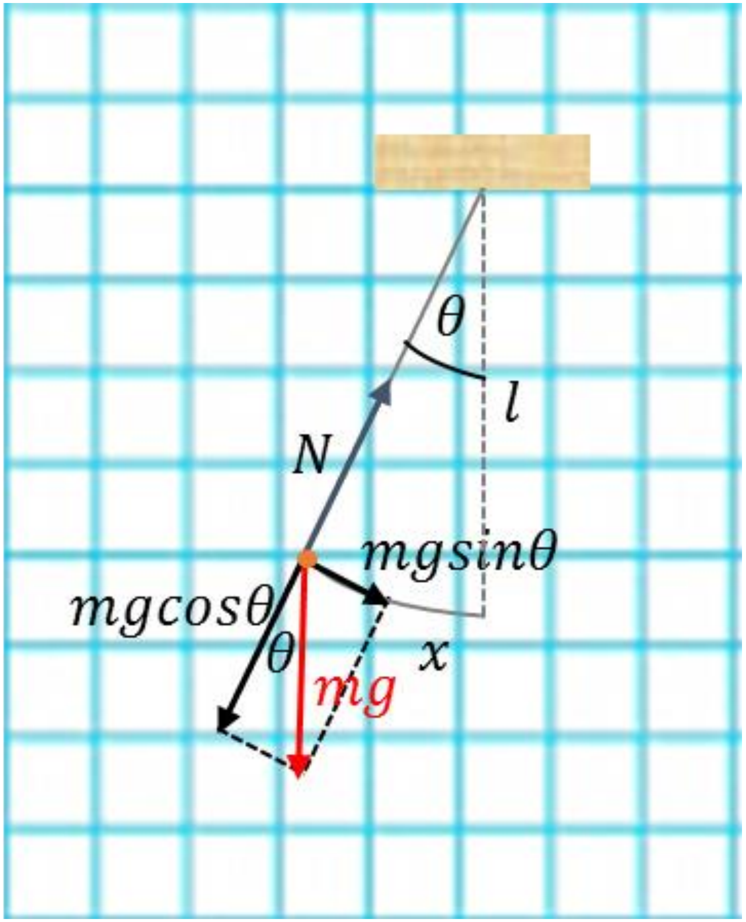
$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{2\pi}$$

$$\omega_0 = 2\pi f$$

Jednostką częstotliwości drgań jest $[Hz] = \left[\frac{1}{s}\right]$.

WAHADŁO MATEMATYCZNE

Wahadło proste (matematyczne) – masa punktowa zawieszona na cienkiej, nieważkiej, nierozciągliwej nici



Siła sprowadzająca wahadło do położenia równowagi:

$$F = -m \cdot g \cdot sin\theta$$

Dla małych kątów:

$$sin\theta \approx \theta$$

$$F = -m \cdot g \cdot \theta = -m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$$

Z II zasady dynamiki Newtona:

$$F = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \frac{x}{l}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g \cdot \frac{x}{l}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot x = 0$$

Równanie ruchu wahadła matematycznego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot x = 0$$

$${\omega_0}^2 = \frac{g}{l}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

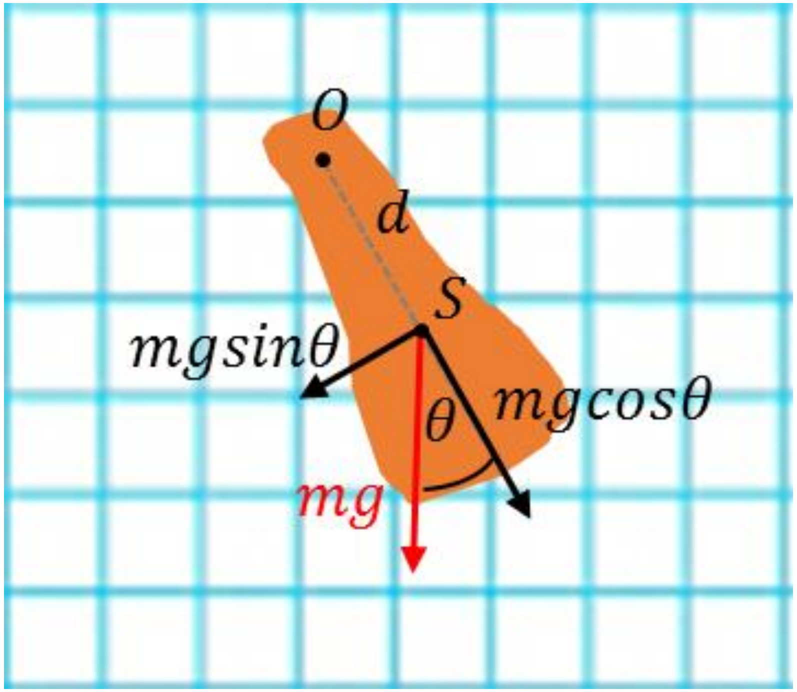
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Okres drgań wahadła matematycznego:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

WAHADŁO FIZYCZNE

Wahadło fizyczne – bryła sztywna zawieszona tak, że może się wahać wokół pewnej osi przechodzącej przez tą bryłę w punkcie odległym o d od środka masy bryły



Moment siły (definicja):

$$\vec{M} = \vec{R} \times \vec{F}$$
$$M = R \cdot F \cdot sin\alpha$$

$$M = -m \cdot g \cdot d \cdot sin\theta$$

Z II zasady dynamiki dla ruchu obrotowego:

$$M = I \cdot \varepsilon$$

$$I \cdot \varepsilon = -m \cdot g \cdot d \cdot sin\theta$$

$$I \cdot \frac{a}{d} = -m \cdot g \cdot d \cdot sin\theta$$

Dla małych kątów:

$$sin\theta \approx \theta$$

Z długości zatoczonego łuku:

$$\theta = \frac{x}{d}$$

$$I \cdot \frac{a}{d} = -m \cdot g \cdot d \cdot \frac{x}{d}$$

$$a = -\frac{m \cdot g \cdot d}{I} \cdot x$$

Równanie ruchu harmonicznego wahadła fizycznego:

$$a = -\frac{m \cdot g \cdot d}{I} \cdot x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{m \cdot g \cdot d}{I} \cdot x = 0$$

$${\omega_0}^2 = \frac{m \cdot g \cdot d}{I}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{m \cdot g \cdot d}{I}}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{m \cdot g \cdot d}}$$

ENERGIA POTENCJALNA i KINETYCZNA W RUCHU HARMONICZNYM

Energia potencjalna:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2$$

$$x(t) = A \cdot cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}k \cdot A^2 \cdot cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

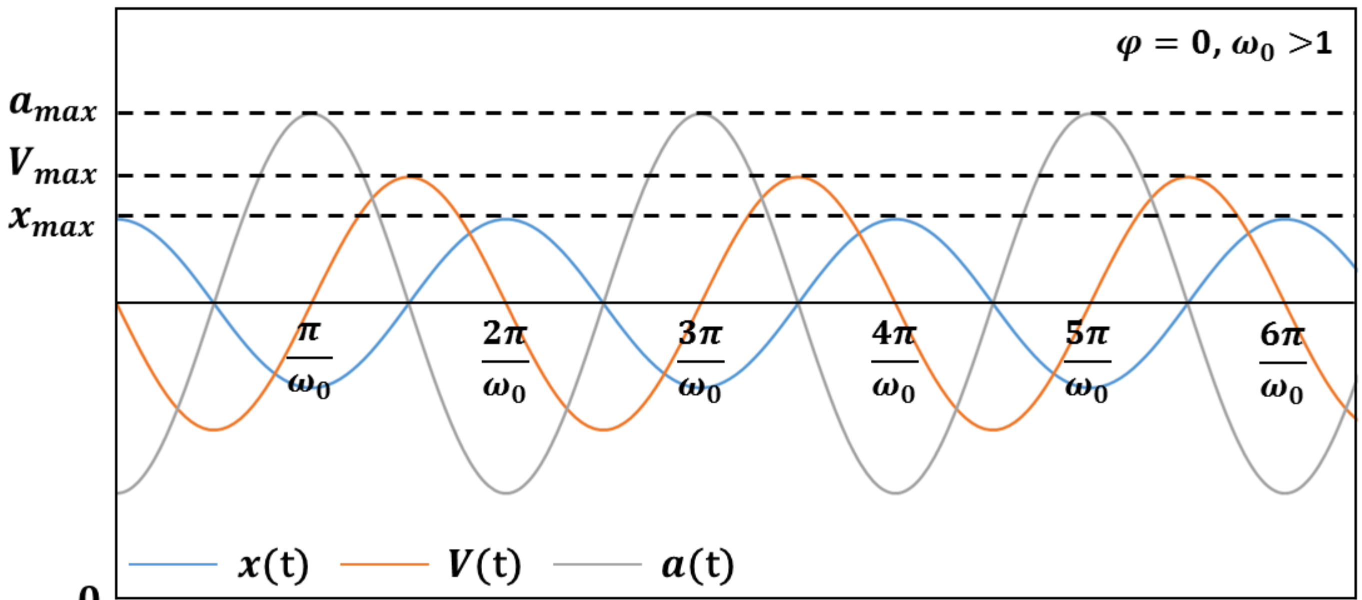
Energia kinetyczna:

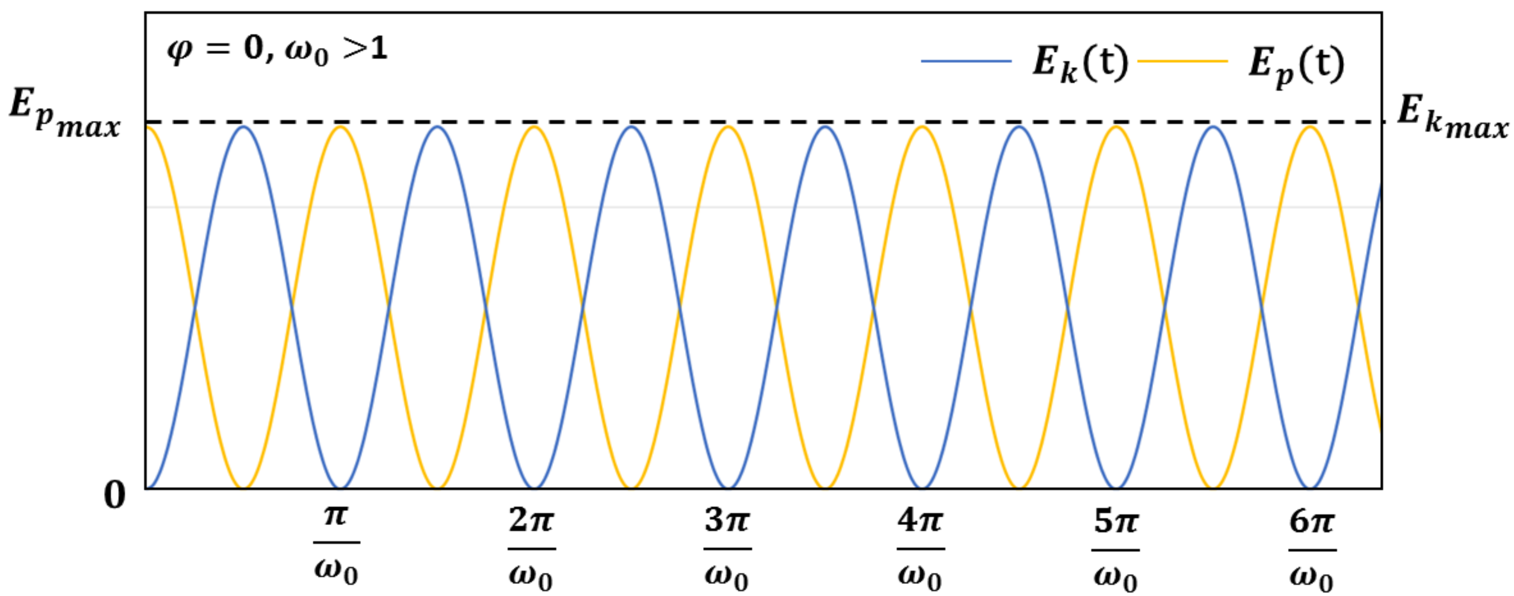
$$E_k = \frac{1}{2}mV^2$$

$$V(t) = -A \cdot \omega_0 \cdot sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$E_k = \frac{1}{2}m \cdot A^2 \cdot {\omega_0}^2 \cdot sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

RUCH DRGAJĄCY





ENERGIA CAŁKOWITA

$$E_c = E_p + E_k$$

$$E_{p_{max}} = \frac{1}{2}k \cdot A^2 \cdot cos^2\left(0° + m \cdot \frac{T}{2}\right) = \frac{1}{2}k \cdot A^2 \; (E_k = 0)$$

$$E_{p_{max}} = E_c = \frac{1}{2}k \cdot A^2$$

$$E_p = 0 \; (E_{k_{max}} = E_c)$$

$$E_{k_{max}} = \frac{1}{2}k \cdot A^2$$

Przykład 1:
Punkt materialny wykonuje ruch harmoniczny zgodnie z równaniem: $x(t) = A \cdot cos(\omega_0 t)$. Jak wielki jest stosunek energii kinetycznej punktu do jego energii potencjalnej po upływie czasu $t = \frac{T}{12}$ od chwili rozpoczęcia ruchu?

$$E_p = \frac{1}{2} k \cdot A^2 \cdot cos^2(\omega_0 t)$$
$$E_k = \frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot {\omega_0}^2 \cdot sin^2(\omega_0 t)$$

$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{\frac{1}{2} m \cdot A^2 \cdot {\omega_0}^2 \cdot sin^2(\omega_0 t)}{\frac{1}{2} k \cdot A^2 \cdot cos^2(\omega_0 t)} = \frac{m \cdot {\omega_0}^2 \cdot sin^2(\omega_0 t)}{k \cdot cos^2(\omega_0 t)}$$
$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$$
$$\frac{E_k}{E_p} = \frac{m \cdot \frac{k}{m} \cdot sin^2(\omega_0 t)}{k \cdot cos^2(\omega_0 t)} = tg^2(\omega_0 t)$$

$$\frac{E_k}{E_p} = tg^2(\omega_0 t)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$t = \frac{T}{12}$$

$$\frac{E_k}{E_p} = tg^2\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12}\right) = tg^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$$

OSCYLATOR HARMONICZNY TŁUMIONY

Tłumienia oscylatora – straty energii oscylatora spowodowane siłą hamującą ruch cząstki (dla drgań mechanicznych mówimy o oporach ruchu, np. opór powietrza).

Siła oporu ma zwrot przeciwny do prędkości!

Siła oporu jest zwykle proporcjonalna do prędkości!

$$F_o = -b \cdot V = -b \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$m \cdot a = -b \cdot \frac{dx}{dt} - k \cdot x$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = 0$$

$$\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$$

$$2\beta = \frac{b}{m}$$

Równanie oscylatora harmonicznego tłumionego:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 \cdot x = 0$$

Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego:

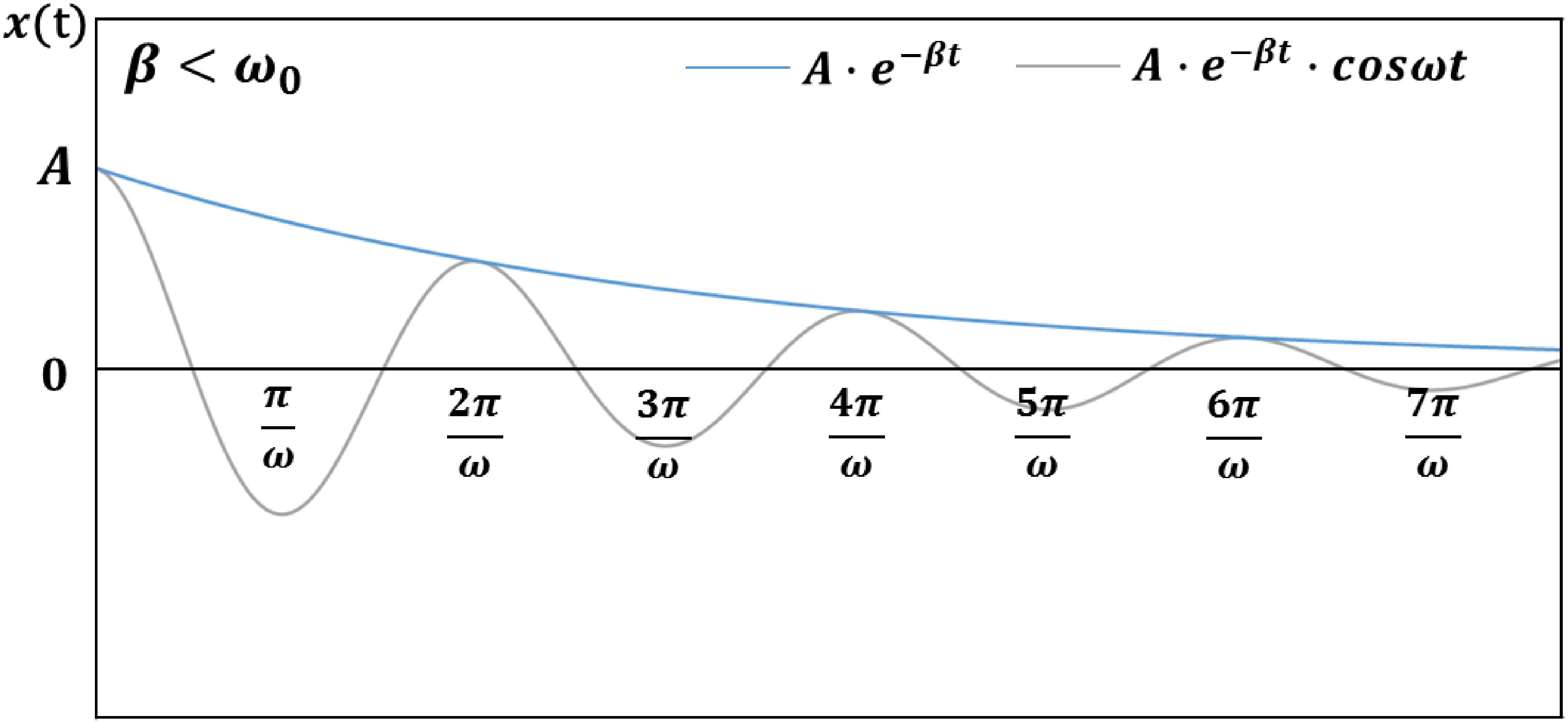
$$x(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot cos(\omega t)$$

gdzie:
$\beta -$ współczynnik tłumienia,
$\omega -$ częstość drgań tłumionych.

Warunek na częstość drgań tłumionych:

$$\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}$$

Opór zmienia zarówno amplitudę, jak i częstość drgań tłumionych!



Warunek na częstość drgań tłumionych:

$$\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}$$

Tłumienie słabe, ruch okresowy:

$$\beta < \omega_0$$

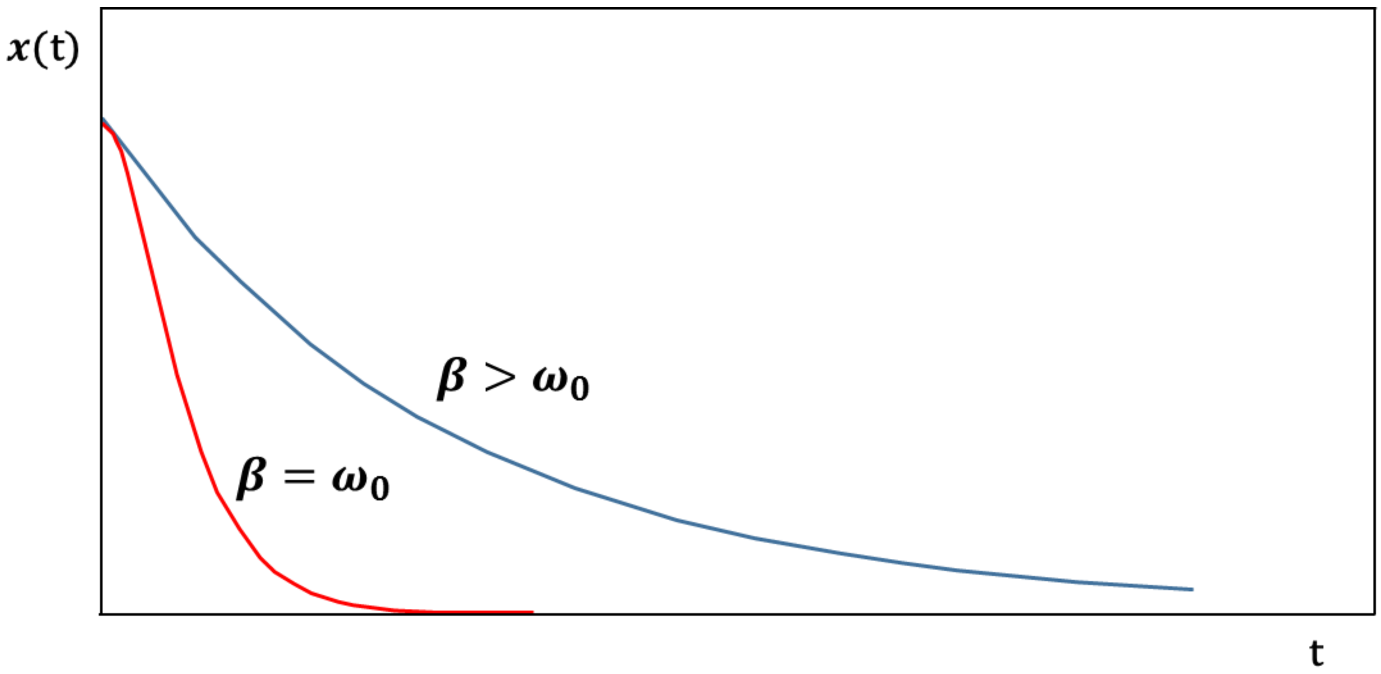
Tłumienie silne, ruch pełzający, aperiodyczny:

$$\beta > \omega_0$$

Tłumienie krytyczne:

$$\beta = \omega_0$$

Wykresy ruchu tłumionego krytycznie i ruchu pełzającego



DRGANIA WYMUSZONE

W ruchu harmonicznym tłumionym amplituda drgań maleje z czasem do zera!

Siła wymuszająca – siła zewnętrzna, którą należy przyłożyć do oscylatora, aby drgania podtrzymać

$$m \cdot a = -b \cdot \frac{dx}{dt} - k \cdot x + F(t)$$

$$F(t) = F_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + b \cdot \frac{dx}{dt} + k \cdot x = F_0 \cdot \cos(\omega t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega t)$$

RUCH DRGAJĄCY

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} \cdot x = \frac{F_0}{m} \cdot \cos(\omega t)$$

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$$

$$2\beta = \frac{b}{m}$$

$$\alpha = \frac{F_0}{m}$$

Równanie oscylatora harmonicznego tłumionego z wymuszeniem:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \cdot \frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 \cdot x = \alpha \cdot \cos(\omega t)$$

gdzie:
β – współczynnik tłumienia,
ω_0 – częstość własna układu (częstość drgań swobodnych),
ω – częstość siły wymuszającej, częstość drgań wymuszonych.

Częstość własna układu = częstość drgań swobodnych – częstość układu, gdy nie działa siła zewnętrzna, nie ma tarcia ani innych sił oporu

Drgania wymuszone odbywają się z częstością siły zewnętrznej!

Rozwiązanie równania oscylatora harmonicznego tłumionego z wymuszeniem:

$$x(t) = A \cdot cos(\omega t + \varphi)$$

Amplituda drgań:

$$A = \frac{\alpha}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

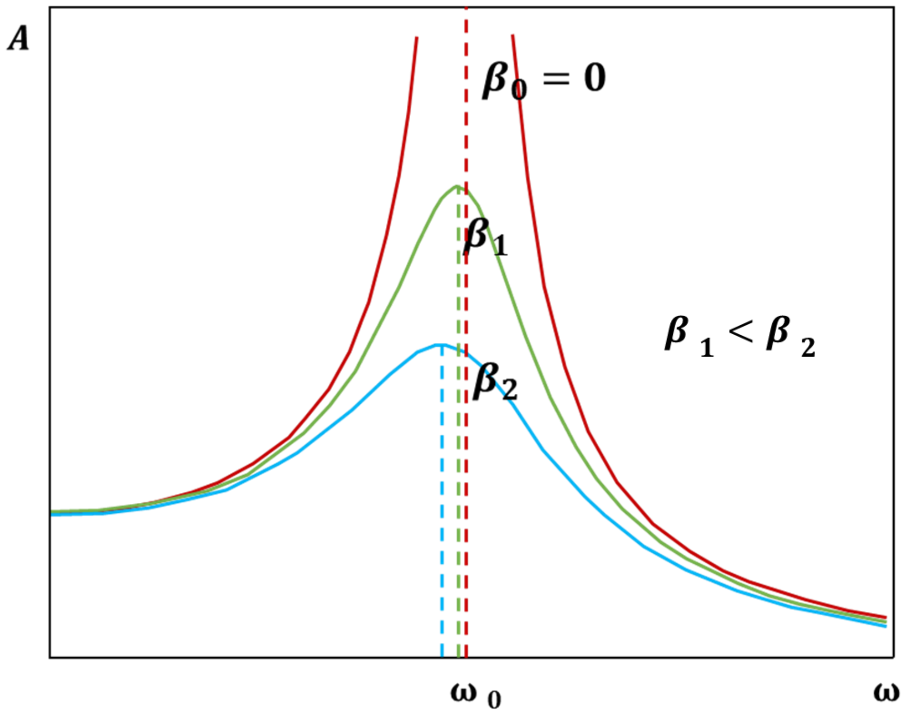
Przesunięcie fazowe – mówi o jaki kąt maksymalne przemieszczenie wyprzedza maksymalną siłę (jak są przesunięte względem siebie funkcje cosinus opisujące wychylenie i siłę wymuszającą)

$$tg\varphi = \frac{2\beta\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2}$$

REZONANS

1. Drgania wymuszone odbywają się z częstością ω siły zewnętrznej!
2. Amplituda i faza drgań wymuszonych zależą od relacji między częstością ω i ω_0 (częstość własna układu)!

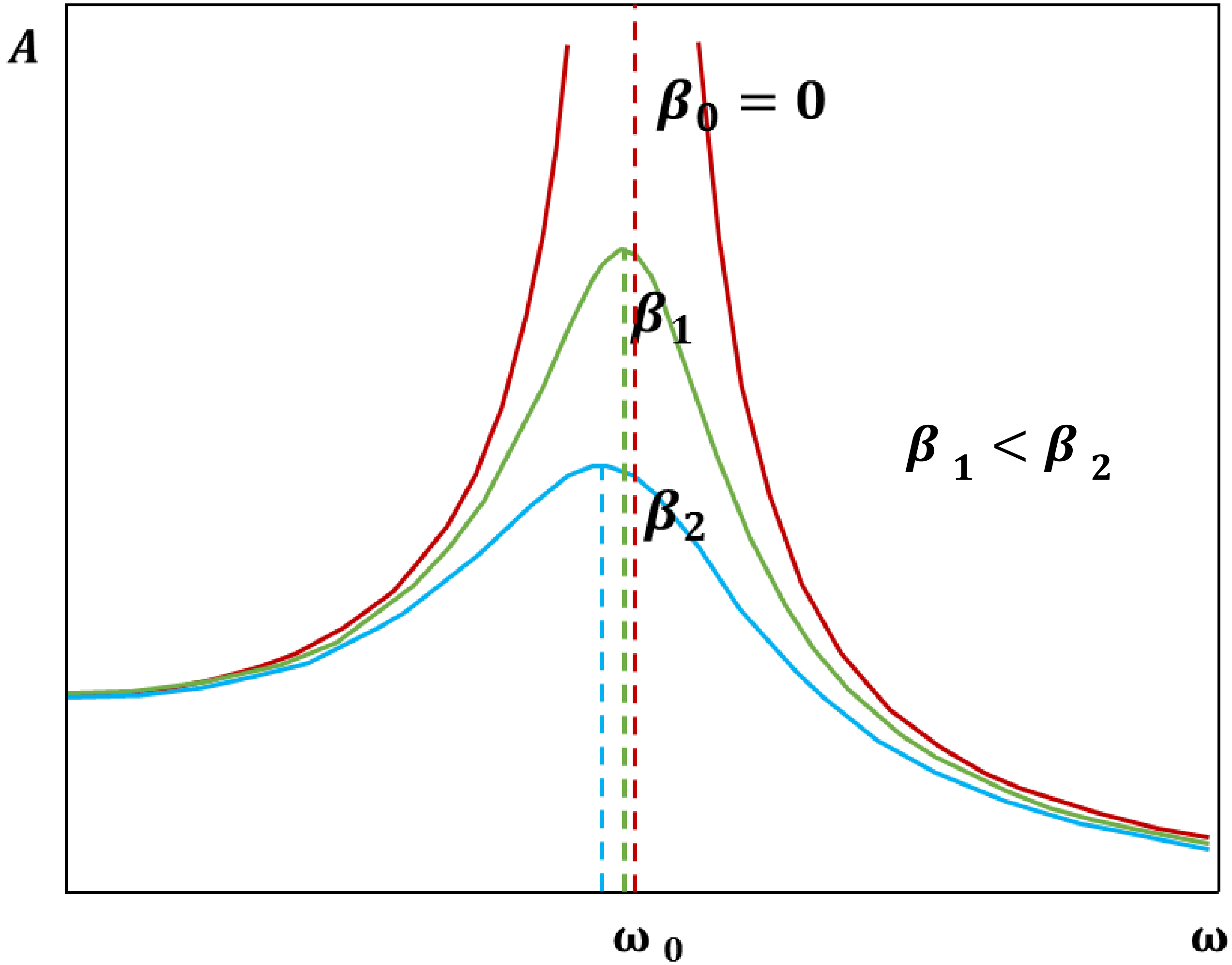
Rezonans – gwałtowny wzrost amplitudy wywołany okresowo zmienną siłą wymuszającą. Może zajść nawet przy niewielkiej wartości siły wymuszającej.



$$A = \frac{\alpha}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

Częstość rezonansowa – częstość siły wymuszającej, dla której amplituda drgań jest maksymalna

Amplituda rezonansowa – amplituda drgań odpowiadająca częstości rezonansowej



Wyznaczanie częstości rezonansowej:

$$A = \frac{\alpha}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}$$

$$\frac{dA}{d\omega} = 0$$

$$\omega_r = \sqrt{{\omega_0}^2 - 2\beta^2}$$

Wyznaczanie amplitudy rezonansowej:

$$A_r = A(\omega_r)$$

$$A_r = \frac{\alpha_0}{2\beta\sqrt{{\omega_0}^2 - \beta^2}}$$

Dla drgań swobodnych, nietłumionych ($\beta = 0$):

1. Amplituda rezonansowa A_r rośnie do nieskończoności

2. Częstość rezonansowa ω_r jest równa częstości drgań swobodnych ω_0

Dla drgań tłumionych ($\beta \uparrow$):

1. Amplituda rezonansowa A_r maleje

2. Częstość rezonansowa przesuwa się w stronę częstości mniejszych od ω_0

Negatywne i pozytywne skutki rezonansu:

1. Drgania elementów karoserii przy określonej częstości obrotów silnika
2. Uszkodzenie budynków, gdy częstości ich drgań własnych odpowiadają częstościom pracy słabo zamocowanych sąsiadujących maszyn
3. Powtarzające się okresowo podmuchy wiatru mogą doprowadzić do zniszczenia budynków, mostów na skutek wzrostu amplitudy ich drgań
4. Ciężki element można wprowadzić w ruch używając nawet niewielkiej siły ale o odpowiedniej częstotliwości (dzwon kościelny, samochód grzęznący w miękkim podłożu)
5. Rozpędzanie huśtawki
6. Czujniki bakterii

https://www.youtube.com/watch?v=XggxeuFDaDU